ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 93 (1996), 195–219

SOUS-GROUPES DISCRETS DES GROUPES $\mathfrak{p}$-ADIQUES DE RANG UN ET ARBRES DE BRUHAT-TITS

PAR

FRANCIS M. CHOUCROUN

Mathématique, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay-Cedex, France
e-mail: choucrou@matups.matups.fr

ABSTRACT

Classically a colored tree is associated to any $\mathfrak{p}$-adic groups of rank one. For some of these, subgroups acting simply transitively on vertices of given color are constructed. In fewer case, the same can be done for edges.

A un groupe $\mathfrak{p}$-adique G, c'est à dire défini sur un corps local non archimédien k, quasi-simple et de rang relatif un, est associé un arbre numéroté $\mathcal{A}_G$ sur lequel G opère.

L'objet de cet article est de construire des sous-groupes de G qui opèrent simplement transitivement sur les sommets d'un numéro donné de $\mathcal{A}_G$. Ces sous-groupes seront appelés réseaux relatifs à ce numéro, ceci sera possible pour certains groupes G, et même dans un nombre plus restreint de cas, ils seront contenus dans des sous-groupes de G qui opèrent simplement transitivement sur les arêtes.

Ces sous-groupes, comme ils paramétrisent les sommets d'un numéro donné ou les arêtes de l'arbre, réalisent une section de la projection de G sur son quotient par un sous-groupe parahorique, ils sont discrets et cocompacts dans G; on les construit comme produits libres de groupes finis, dont l'arbre associé se plonge isométriquement sur $\mathcal{A}_G$.

On montre que, si G possède pour un sommet $s \in \mathcal{A}_G$ un sous-groupe simplement transitif sur la sphère unité $S(s,1)$, il contient un réseau relatif au numéro

Received November 24, 1993 and in revised form March 20, 1995

autre que celui de s, et qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il contienne des réseaux simplement transitifs sur les arêtes de $\mathcal{A}_G$, est qu'étant donnés deux sommets voisins s et t, le groupe G possède pour chaque sphère $S(s,1)$ et $S(t,1)$ un sous-groupe simplement transitif.

Cette condition ne pourra être satisfaite que pour les groupes G et les sommets $s \in \mathcal{A}_G$, pour lesquels $S(s,1)$ a une structure de droite projective sur un corps fini, sur laquelle la restriction du fixateur de s dans G opère par homographies. Dans les autres cas, où cette action est celle d'un groupe de type SU_3 sur la variété de ses sous-groupes de Borel, cette construction est impossible.

On sera amené à étudier cas par cas, les groupes $\mathfrak{p}$-adiques G qui sont en rang un, tous des groupes classiques, et on discutera les relèvements à G des sous-groupes construits sur des corps finis. Ici les résultats ne seront détaillés que dans les cas les plus simples.

L'étude des sous-groupes discrets cocompacts sans torsion de $\mathrm{PGL}_2(k)$ a été inaugurée par Ihara [I] sans que soit étudié le rapport avec l'arbre sous-jacent, qui d'ailleurs n'avait pas encore été défini.

J'ai donné [C-2], pour les groupes dont l'arbre est homogène et qui y opèrent transitivement, une construction de sous-groupes simplement transitifs sur les sommets, qui est explicitée pour $\mathrm{PGL}_2(k)$. L'objet de cet article est une généralisation des résultats dans le cas non homogène.

Remarquons qu'il n'y a pas toujours de réseau adapté à un numéro donné et même si les les méthodes employées ne les donnent pas tous, elles donnent des résultats plus précis que ceux obtenus par différents auteurs qui ont construit des réseaux uniformes dans des groupes réductifs $\mathfrak{p}$-adiques. Pour le rang un, signalons, A. Lubotzky [L-2] et [L-3] qui a exhibé des réseaux uniformes d'abord dans $\mathrm{PSL}_2(k)$, puis dans tous les groupes construits comme groupes de Schottky, et H. Bass et R. Kulkarni [B], [B-K] en ont en prouvé l'existence et fait la théorie.

Pour énoncer les résultats obtenus, on note q le cardinal du corps résiduel de k.

La première famille de groupes étudiée est celle des groupes linéaires, construits à partir d'une algèbre à division D, centrale simple sur k dont on note d le degré.

Le groupe $\mathrm{PGL}_2(D)$, qui opère transitivement sur un arbre homogène de type q^d, possède des sous-groupes simplement transitifs sur les sommets sauf si q et d sont simultanément pairs. Le groupe $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$, qui opère sur le même arbre que $\mathrm{PGL}_2(D)$, mais avec deux orbites, possède, sauf si q est impair et d est pair, des sous-groupes simplement transitifs sur les arêtes. Enfin le groupe $\mathrm{PSL}_2(D)$ possède, si q est pair ou si $q^d \equiv 3 \bmod 4$, des réseaux simplement transitifs sur les arêtes.

Le seul groupe orthogonal de rang relatif un, qui n'est pas une forme d'un groupe linéaire, est celui d'une forme de dimension 5. Si G est le groupe spécial orthogonal de cette forme, son arbre est de type (q, q^2), il possède toujours des réseaux relatifs aux sommets d'ordre $q^2 + 1$, et si q est pair il possède de réseaux simplement transitifs sur les arêtes.

On considère ensuite les groupes unitaires de rang relatif un, ce sont tous les groupes unitaires en dimension 3 et certains en dimension 4. Dans tous les cas, les groupes SU_3 associés à une extension ramifiée possèdent des réseaux relatifs à un numéro que l'on peut décrire dans le diagramme de Dynkin, mais pas pour l'autre, et les groupes $\mathrm{SU}_4/\pm I$ de rang un associés à une extension ramifiée, possèdent un réseau relatif aux sommets d'ordre $q+1$.

Si de plus q est pair, d'une part les groupes SU_3 et SU_4 de rang un associés à une extension ramifiée possèdent des réseaux simplement transitifs sur les arêtes, d'autre part les groupes SU_3 associés à une extension non ramifiée possèdent des réseaux relatifs aux sommets de type q^3.

Enfin quelle que soit la parité de q, le groupe $PGU(4)$, formé des classes de similitudes d'une forme hermitienne de degré 4 et de rang un associée à une extension non ramifiée, possède des sous-groupes qui opèrent simplement transitivement sur les sommets de son arbre.

Dans cet article k désigne un corps local non archimédien, dont q est l'ordre du corps résiduel, on note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de k, d'idéal maximal $\mathfrak{p} = \varpi_k \mathfrak{O}$.

Pour une extension L de k, on notera $\mathfrak{O}_L$ l'anneau des entiers, dont $\mathfrak{p}_L = \varpi_L \mathfrak{O}_L$ est l'idéal maximal.

Pour une algèbre centrale simple D sur k de degré d, on note $\mathfrak{O}_D$ l'ordre maximal, dont $\mathfrak{p}_D$ est l'idéal maximal.

De façon générale, dans un anneau local on désignera la réduction par $x \mapsto \bar{x}$, que l'on ne confondera pas avec la conjugaison $x \mapsto x^\sigma$ par l'élément non trivial du groupe de Galois Gal(L|k) d'une extension quadratique galoisienne.

On rappelle la terminologie utilisée. Un arbre semi-homogène de type (q_1, q_2), où q_1, q_2 sont des entiers non tous deux égaux à 1, est la donnée d'un arbre muni d'une application de l'ensemble de sommets sur $\{1, 2\}$, appelée numérotation, telle que les arêtes soit composées de sommets de numéros distincts, et telle que tout sommet de numéro i soit d'ordre $q_i + 1$. Un arbre homogène de type l est un arbre, non numéroté, dont tous les sommets sont d'ordre $l + 1$. Dans un arbre, $S(x, r)$ désigne la sphère de centre x et de rayon r pour la métrique géodésique.

Dans un groupe H, on notera $H^* = H - \{e\}$.

1. Construction de réseaux

1.1. Rappelons le résultat établi dans [C-2], qui permet de construire dans $\mathrm{PGL}_2(k)$ des réseaux et qu'il s'agira de généraliser aux arbres semi-homogènes.

Soit G un groupe qui opère sur un arbre homogène $\mathcal{A}$ de type l, dont on fixe un sommet O origine.

On considère le groupe $\Gamma_{r,s}$, produit libre de s groupes d'ordre 2 et de r groupes cycliques infinis, on rappelle que son graphe de Cayley $\mathcal{A}_{r,s}$, relatif aux $2r + s$ générateurs de ces groupes cycliques, est un arbre homogène.

Proposition 1: *On considère une partie $B \subset G$, et on note Γ le groupe engendré par B.*

On suppose que $B = B^{-1}$, que $|B| = l + 1$, et que $B(O) = S(O, 1)$.

Le groupe Γ opère simplement transitivement sur $\mathcal{A}$, et il existe un isomorphisme de $\Gamma_{r,s}$ sur Γ, où $2r + s = l + 1$, pour s égal au nombre d'involutions de B, dont B est l'image des $2r + s$ générateurs, qui induit un isomorphisme d'arbres entre $\mathcal{A}_{r,s}$ et $\mathcal{A}$.

Réciproquement tout sous-groupe de G simplement transitif sur $\mathcal{A}$ est de ce type.

Cet énoncé s'applique, bien entendu, aux groupes $\mathfrak{p}$-adiques quasi-simples de rang relatif un dont l'arbre est un arbre homogène sur lequel ils opèrent transitivement. On vérifie par inspection des tables de Tits [T], qu'il s'agit des groupes $\mathrm{PGL}_2(D)$, et du groupe $\mathrm{PGU}(4)$ associé à une forme hermitienne relative à une extension non ramifiée en dimension 4 et de rang un. La méthode de la note [C-2] s'applique en partie, car ces groupes sont doublement transitifs sur les sphères unité, voir [C-3], et que par construction des arbres, ils possèdent sur toutes les géodésiques des translations de pas un. Par contre l'existence d'involution échangeant deux sommets voisins sera dans chaque cas à discuter.

1.2. Il s'agit de construire dans cette partie des groupes qui opèrent simplement transitivement sur les sommets d'un numéro donné d'un arbre semi-homogène.

On se donne $k+1$ groupes H_i $(i = 1, \dots, k+1)$ de même ordre $r+1$, avec $k \neq 1$ ou $r \neq 1$, et on note $\Gamma = *_{i=1,\dots,k+1} H_i$ le produit libre de ces groupes. Le cas particulier où les H_i sont tous égaux à $\mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z}$ est intéressant.

Le graphe de Cayley de Γ associé n'est plus un arbre en général et ne doit donc plus être considéré, contrairement à ce qui a été fait dans le cas du groupe libre et dans les articles cités par [M-W] pour le produit libre des groupes cycliques.

On considère le graphe $\mathcal{A}_\Gamma$, dont l'ensemble des sommets est $S = S_1 \sqcup S_2$, avec $S_1 = \Gamma$ et $S_2 = \bigsqcup_{i=1,\dots,k+1} \Gamma/H_i$ et dont l'ensemble des arêtes $A \subset S_1 \times S_2$ est formé des paires $(g, g'H_i)$ avec $g \in g'H_i$. Les sommets de numéro 1 sont de valence $k+1$, ceux de numéro 2 sont de valence $r+1$.

Cette construction peut s'interprêter en terme de graphes de groupes: on considère le graphe G_J de groupes, de sommets $I = \{0\} \cup J$, avec $J = \{1, \dots, k+1\}$, d'arêtes sont $\{\{0, i\} \; |i \in J\}$, les groupes H_i attachés aux sommets $i \in J$ sont les groupes H_i déjà définis, et les autres groupes, attachés aux arêtes ainsi qu'au sommet 0, étant triviaux. Le groupe fondamental du graphe de groupe est le produit libre Γ des groupes H_i, qui opère, avec $k+2$ orbites, sur le revêtement fondamental du graphe G_J, c'est un arbre qui s'identifie à $\mathcal{A}_\Gamma$, et Γ opère simplement transitivement sur l'orbite de 0. Voir [S] I§5.

On numérote le graphe obtenu pour en faire un arbre semi-homogène de type (k, r), sur lequel Γ opère par des isométries de façon simplement transitive sur les sommets de numéro 1 qui constitue l'orbite de 0.

1.3. On considère deux groupes finis non triviaux, non tous deux d'ordre 2, G_1 d'ordre k_1 et G_2 d'ordre k_2. On note $\tilde{\Gamma} = G_1 * G_2$ le produit libre de ces deux groupes, et on considère le graphe $\mathcal{A}_{\tilde{\Gamma}}$, dont l'ensemble des sommets est $S = S_1 \sqcup S_2$ avec $S_i = \tilde{\Gamma}/G_i$, et dont l'ensemble des arêtes est $\tilde{\Gamma}$, identifié aux couples (gG_1, hG_2) avec $gG_1 \cap hG_2 \neq \emptyset$. Cette construction peut s'interprêter, comme la précédente, en terme de graphes de groupes.

On pose $I = \{1, 2\}$ et on considère le graphe G_I de groupes, dont les sommets sont I, les arêtes $\{1, 2\}$, le groupe G_i pour $i = 1, 2$, étant attaché au sommet i, le groupe attaché à l'arête étant trivial. Le groupe fondamental de ce graphe de groupe est le produit libre $\tilde{\Gamma}$ des groupes G_i, qui opère, avec 2 orbites, sur le revêtement fondamental du graphe G_I qui est un arbre semi-homogène de type $(k_1 - 1, k_2 - 1)$, et $\tilde{\Gamma}$ y opère, via la multiplication à gauche, par des automorphismes simplement transitivement sur les arêtes de l'arbre.

Les homomorphismes canoniques de $G_1 \times G_2$ dans G_1 et G_2 définis par $(g_1, g_2) \mapsto g_1$ et $(g_1, g_2) \mapsto g_2$ induisent des homomorphismes μ_1 de $\tilde{\Gamma}$ sur G_1 et μ_2 de $\tilde{\Gamma}$ sur G_2, et on posera $\Gamma_1 = \ker \mu_1$ et $\Gamma_2 = \ker \mu_2$.

On vérifie que Γ_1 est le produit libre des $k_2 + 1$ groupes hG_2h^{-1} pour $h \in G_1$, et que $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \rtimes G_1$. De même pour Γ_2.

Montrons comment les arbres attachés à $\tilde{\Gamma}$ et à Γ_i peuvent être identifiés.

Pour fixer les idées choisissons $i = 1$; tout élément $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ s'écrivant de façon unique $\gamma = gg_1$ avec $g \in \Gamma$ et $g_1 \in G_1$, à la classe γG_1 on associe l'élément $g \in \Gamma$, et à la classe γG_2 on associe la classe $\gamma G_2 g_1^{-1} = gg_1G_2g_1^{-1}$, enfin à l'élément $\gamma \in \tilde{\Gamma}$ on associe $(g, \gamma G_2 g_1^{-1})$: on vérifie aisément que c'est une bijection entre sommets et arêtes des deux arbres sur lesquels les groupes opèrent à gauche par la même action.

1.4. L'analogue dans le cas semi-homogène de la proposition 1 est

Proposition 2: *Soit $\mathcal{A}$ un arbre semi-homogène de type (q_1, q_2), dont on note $\mathcal{G}$ le groupe d'automorphismes. On choisit un sommet x_0 de numéro 1 de $\mathcal{A}$ et on suppose donné pour tout $y \in S(x_0, 1)$ un sous-groupe $H_y \subset \mathcal{G}$, qui opère simplement transitivement sur la sphère $S(y, 1)$.*

Soient les groupes $H = \langle H_y \mid y \in S(x_0, 1)\rangle \subset \mathcal{G}$, et $\Gamma = *_{y \in S(x_0,1)} H_y$, dont on note $\mathcal{A}_\Gamma$ l'arbre associé.

(1) *L'homomorphisme canonique φ de Γ sur H est un isomorphisme, H opère de façon simplement transitive sur les sommets de $\mathcal{A}$ de numéro 1; de plus l'application $\varphi(.)(x_0)$ de Γ dans $\mathcal{A}$ se prolonge en un isomorphisme d'arbres de $\mathcal{A}_\Gamma$ sur $\mathcal{A}$.*
(2) *S'il existe un sous-groupe H tel que pour tout $y \in S(x_0, 1)$ le groupe $H_y = g_y H g_y^{-1}$ avec $g_y \in \mathcal{G}$, alors le groupe Γ_0 engendré par les commutateurs $C = \{[g_y, h] \mid y \in S(x_0, 1), h \in H^*, \}$ est libre de base C, on a $\Gamma = \Gamma_0 \rtimes H_y$, et $[\Gamma\colon \Gamma_0]$ divise $[\Gamma\colon \Gamma']$ pour tout sous-groupe libre Γ' de Γ.*

Corollaire 3: *Soient dans un arbre semi-homogène $\mathcal{A}$, de type (q_1, q_2), deux sommets voisins x_1 et x_2, avec x_1 de numéro 1.*

On suppose donné pour $i = 1, 2$, un sous-groupe d'automorphismes de $H_i \subset \mathcal{A}$ simplement transitif sur la sphère $S(x_i, 1)$.

Alors le groupe $K = \langle H_1 \cup H_2\rangle$ opère simplement transitivement sur les arêtes de $\mathcal{A}$, et est produit libre des deux groupes H_1 et H_2.

Le groupe K contient deux sous-groupes distingués H^1 et H^2. Chaque groupe H^i opère simplement transitivement sur les sommets du numéro donné i, et est le produit libre des conjugués de H_{3-i} par les éléments de H_i. Enfin $K = H^1 \rtimes H_1 = H^2 \rtimes H_2$.

Réciproquement tout groupe qui opère simplement transitivement sur les arêtes de l'arbre est de cette forme.

Démonstration: La démonstration est la même que celle de [C-2] faite pour les arbres homogènes : on pose $B = \cup_{y \in S(x_0,1)} H_y^*$, on a $|B| = |S(x_0,2)|$ et $Bx_0 = S(x_0,2)$, pour démontrer (1) on utilise le lemme suivant et on conclut par un argument de comptage.

LEMME 4: *Soit x un sommet de $\mathcal{A}$ de numéro 1, on pose $d(x_0,x) = 2n$. Alors il existe n éléments $b_1, \ldots, b_n \in B$ tels que $x = b_1 \ldots b_n x_0$, et ces éléments satisfont à $b_i b_{i+1} \notin B \cup \{e\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$;*

Réciproquement, étant donnés n éléments $b_i \in B$ satisfaisant à $b_i b_{i+1} \notin B \cup \{e\}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, on a $d(x,x_0) = 2n$ pour le sommet $x = b_1 \ldots b_n x_0$.

Pour démontrer le corollaire, on écrit $\ker \mu_1$ comme l'ensemble des produits $a_1 b_1 \ldots a_k b_k$, où $a_i \in H_1$, $b_i \in H_2$, avec $a_1 \ldots a_k = 1$, et on remarque qu'ils peuvent encore s'écrire $\alpha_1 b_1 \alpha_1^{-1} \ldots \alpha_k b_k \alpha_k^{-1}$, avec $\alpha_i \in H_1$.

Pour établir le (2) de la proposition, on considère Γ_0 le noyau de l'homomorphisme canonique de Γ dans H défini à partir de H_y par $g_y h g_y \mapsto h$. On vérifie que le fixateur dans Γ_0 des sommets de $S(O,1)$ est trivial, ainsi que celui de O, donc il opère librement sur l'arbre, et c'est donc un groupe libre. Pour vérifier qu'il est engendré par C, on utilise la formule

$$aba^{-1}cdc^{-1} = [a,b][c,b^{-1}]^{-1}c(b^{-1}d)c^{-1},$$

et on vérifie aisément que les éléments de C engendre un groupe libre de base C.

Ces calculs précisent des résultats plus généraux, voir [S] 2.6, Cor à la prop 11, et [B-H] 2.7., voir aussi [B].

La démonstration des autres assertions est facile. ∎

Remarque 1: Dans le cas où on appliquera cette construction à un groupe $\mathfrak{p}$-adique, on pourra toujours supposer que les hypothèses de (2) sont satisfaites.

Remarque 2: Le corollaire est, peu ou prou, en partie un cas particulier d'un théorème de Tits cf. [S].

1.5. Nous allons donner quelques définitions.

Définition 1: Etant donné G un groupe topologique qui opère sur un arbre semi-homogène, et admet un plongement continu comme sous-groupe fermé du groupe des automorphismes de l'arbre, on appelle réseau (uniforme) relatif au numéro i un sous-groupe Γ de G qui opère simplement transitivement sur les sommets de numéro i.

Définition 2: Un réseau relatif (uniforme) au numéro i sera dit de type
cyclique s'il est produit libre de $q_i + 1$ groupes cycliques de même ordre,
diédral s'il est produit libre de $q_i + 1$ groupes diédraux de même ordre,
mixte s'il est produit libre de $q_i + 1$ groupes cycliques ou diédraux de même ordre.

1.6. Un des résultats de la théorie de Bruhat-Tits est que la restriction de l'action du fixateur d'un sommet à la sphère unité centrée en ce sommet est celle d'un groupe sur un corps fini (donc quasi-déployé) agissant sur la variété des sous-groupes de Borel.

D'après la classification des groupes algébriques sur un corps fini, cette action est celle de PGL_2, ou de PSL_2, de PSU_3 ou de PU_3 d'un corps fini sur son immeuble sphérique, qui est dans les premiers cas une droite projective, et les deux derniers cas la variété des droites isotropes pour une forme hermitienne non dégénérée.

Dans les cas PSU_3 et PU_3, il n'existe pas de sous-groupe simplement transitif sur la variété des droites isotropes, comme on peut le vérifier dans les tables des groupes simples finis pour les petits ordres. On limitera donc l'analyse des groupes aux cas où l'action résiduelle est du type PGL_2.

PROPOSITION 5: *Soit F un corps fini de cardinal l.*

(1) *Il existe un sous-groupe cyclique d'ordre $l + 1$ de $\mathrm{PGL}_2(F)$, dont l'intersection avec le sous-groupe de Borel standard est triviale, et qui ainsi opère de façon simplement transitive sur la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$.*

(2) *Si $l \equiv 3 \bmod 4$, il existe un sous-groupe de $\mathrm{PSL}_2(F)$, diédral d'ordre $l + 1$, qui opère de façon simplement transitive sur la droite projective $\mathbb{P}^1(F)$.*

PROPOSITION 6: *Soit K un corps local, d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}_K$, dont le corps résiduel a l éléments.*

(1) *Il existe un sous-groupe cyclique d'ordre* $l+1$ *de* $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O}_K)$, *dont l'intersection avec le sous-groupe d'Iwahori standard est triviale, et qui ainsi opère de façon simplement transitive sur la sphère unité de l'arbre. Dans le cas où* l *est une puissance de* 2, *c'est un sous-groupe de* $\mathrm{PSL}_2(\mathfrak{O}_K)$, *que l'on peut relever bijectivement en un sous-groupe de* $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{O}_K)$.

(2) *Si* $l \equiv 3 \bmod 4$, *il existe un sous-groupe diédral d'ordre* $l+1$ *de* $\mathrm{PSL}_2(\mathfrak{O}_K)$, *dont l'intersection avec le sous-groupe d'Iwahori standard est triviale, et qui ainsi opère de façon simplement transitive sur la sphère unité de l'arbre.*

De plus, ces sous-groupes de $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O}_K)$ *se relèvent en sous-groupes de* $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_K)$ *dont l'intersection avec le centre de* $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_K)$ *est constituée de scalaires appartenant à* $\mu_{2^\infty}(K)$.

Démonstration: On commence par démontrer la proposition dans le cas fini. Soit $\overline{L} = F(\overline{\alpha})$, une extension quadratique de F déterminée par $\overline{\alpha}$ solution d'une équation $\overline{\alpha}^2 = \overline{\beta}$ si l est impair, et $\overline{\alpha}^2 + \overline{\alpha} = \overline{\beta}$ sinon, où $\overline{\beta} \in F$. On plonge $\overline{L^*}$ dans $GL_2(F)$, en associant à $\xi = u + v\overline{\alpha} \in \overline{L}$ la matrice $M(\xi)$ de la multiplication par ξ dans $\overline{L}^*$ dans la base $(1, \overline{\alpha})$, égale à

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} u & v\overline{\beta} \\ v & u \end{pmatrix} \text{ si } l \text{ est impair, et } \begin{pmatrix} u & v\overline{\beta} \\ v & u+v \end{pmatrix} \text{ sinon.}$$

On vérifie que a matrice $M(\xi)$ n'est triangulaire supérieure que si $\xi \in F$ car $v = 0$ implique que $M(\xi)$ est scalaire.

Soit ξ un générateur du groupe cyclique $\overline{L}^*$

Déterminons à quelle condition $\xi^n \in F^*$: comme F^* est l'ensemble des solutions de $\xi^{n(l-1)} = 1$, on doit avoir $n(l-1)$ est multiple de $l^2 - 1$, donc n multiple de $l+1$. On voit ainsi que l'image de ξ dans $\mathrm{PGL}_2(F)$ est d'ordre $l+1$ et, compte-tenu de ce qui précéde, le groupe qu'elle engendre a une intersection triviale avec le sous-groupe de Borel standard, d'où (1).

On écrit $l - 1 = 2^m u$, avec u est impair, de sorte que $l+1$ et u sont premiers entre eux; ainsi l'image de ξ^u dans PGL_2 sera encore d'ordre $l+1$. Les éléments ξ et ξ^u engendrent le même sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(F)$, mais l'intersection du groupe engendré par ξ^u dans GL_2 avec F^* est $\mu_{2^m}(F)$.

On suppose que q est impair, pour établir le point (2). On sait que l'application norme de $\overline{L^*}$ dans F^* est surjective. Comme ξ est un générateur du groupe $\overline{L^*}$, sa norme $N\xi$ sera un générateur du groupe F^*, dont l'ordre est le nombre pair $l-1$, ainsi $N\xi \notin F^2$. Comme le déterminant de $M(\xi)$ est $N\xi$, l'image de $M(\xi)$ dans $\mathrm{PGL}_2(F)$ ne sera pas dans $\mathrm{PSL}_2(F)$.

On suppose désormais $l \equiv 3 \bmod 4$. Dans ce cas, -1 n'est pas un carré et on peut choisir $\overline{\alpha} = \sqrt{-1}$. On peut écrire le groupe

$$\overline{L^*} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}, \text{ on pose } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

σ normalise $\overline{L^*}$, on a $\sigma\xi\sigma = \xi^{-1}$ et $\sigma^2 = 1$.

On identifie ainsi $\overline{L^*} \rtimes \langle\sigma\rangle$ à un sous-groupe de $GL_2(F)$. L'élément $\xi \in \overline{L^*}$ ayant été fixé comme ci-dessus, soit $G = \{\xi^k\sigma^k\} \subset \overline{L^*} \rtimes \langle\sigma\rangle$; on vérifie que c'est un groupe diédral d'ordre $l^2 - 1$, que $\overline{L^*}$ plongé dans $F \times F$ est l'orbite sous G de $(1, 0)$ et que les déterminants des éléments de G sont des carrés de F.

Comme $l + 1$ est pair, $F^* = \langle\xi^{l+1}\rangle \subset G$, l'image H de G dans PGL_2 est un groupe diédral d'ordre $l + 1$, transitif sur $\mathbb{P}^1(F)$, et même simplement transitif pour des raisons de cardinal.

La proposition locale se démontre de façon analogue, et pour cela on choisit une extension quadratique non ramifiée $L = K(\alpha)$ de K, avec α solution d'une équation $\alpha^2 = \beta$ si q est impair, $\alpha^2 + \alpha = \beta$ sinon, et $\beta \in K$, avec $\beta = -1$ pour le (2). Et dans le cas où l est pair, on note qu'un élément $\gamma \in \mathrm{PGL}_2(K)$ d'ordre $l + 1$ a une norme qui est un carré car d'ordre impair, ainsi est dans $\mathrm{PSL}_2(K)$ et se relève même dans $\mathrm{SL}_2(K)$ en un élément de même ordre. ∎

Remarque 1: L'exemple des groupes $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_5)$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$ isomorphes à des groupes alternés, et donc facile à étudier, montre qu'il n'existe pas en général de sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_l)$ simplement transitifs sur la droite projective si $l \equiv 1 \bmod 4$. On voit dans ces deux cas qu'un groupe d'ordre $l + 1$ rencontre de façon non triviale le normalisateur d'un sous-groupe de Sylow d'ordre l.

Remarque 2: Dans le cas où l est pair, les groupes $\mathrm{PGL}_2(F)$ et $\mathrm{PSL}_2(F)$ coïncident.

2. Groupes linéaires

Soit D une algèbre à division centrale simple sur k de degré d. Elle contient une unique extension maximale non ramifiée de k, qu'on note L on a $[L\colon k] = d$, et on peut choisir l'uniformisante ϖ_D de D vérifiant $\varpi_D^d = \varpi_k$. cf. [J], th 9.21.

2.1 $\mathrm{PGL}_2(D)$. La proposition 1 donne

PROPOSITION 7: *Soit $G = \mathrm{PGL}_2(D)$, il opère transitivement sur son arbre $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}$ homogène de type q^d.*

(1) *On suppose d impair. Etant donnés deux entiers r, s avec $2r + s = q^d + 1$, le groupe G possède des sous-groupes discrets isomorphes à*

$$\Gamma_{r,s} = \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{r} * \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{s},$$

qui opèrent simplement transitivement sur l'arbre $\mathcal{A}$, réalisant des isomorphismes entre les arbres $\mathcal{A}_{r,s}$ et $\mathcal{A}$. De plus tout sous-groupe simplement transitif sur les sommets est de l'un de ces types.

(2) *On suppose d pair. Le groupe $\mathrm{PGL}_2(D)$ possède des sous-groupes qui opèrent simplement transitivement sur l'arbre $\mathcal{A}$, si et seulement si q est impair. Dans ce cas ce sont des groupes libres à $(q^d + 1)/2$ générateurs, et leur arbre de Cayley est isomorphe à celui de $\mathrm{PGL}_2(D)$.*

Démonstration: Le groupe G est "doublement" transitif sur son arbre, il agit doublement transitivement sur l'espace des bouts et possède, pour toute géodésique, des translations de pas un. L'existence d'involutions échangeant deux sommets voisins est, comme on peut le voir en conjugant par G, équivalente à l'existence d'une involution σ qui stabilise la géodésique associée à $(\mathfrak{O}_D \times \mathfrak{P}_D^n)_{n\in\mathbb{Z}}$, échangeant ses bouts et les sommets associés à $\mathfrak{O}_D \times \mathfrak{O}_D$ et à $\mathfrak{O}_D \times \mathfrak{P}_D$.

On vérifie que si d est impair l'élément σ représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \varpi_D^m \\ \varpi_D^{m+1} & 0 \end{pmatrix}$$

vérifie ces conditions car $\sigma^2 = 1$, puisque σ^2 est représenté par la matrice scalaire dont le coefficient diagonal $\varpi_D^{2m+1} = \varpi_D^d \in k$ est central.

Par contre si d est pair, montrons qu'il n'existe pas d'involution σ qui vérifie ces conditions. Sinon on considérerait $w\sigma$, avec $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui comme il fixe les deux bouts $\pm\infty$ serait diagonal, d'où $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, et pour échanger les deux sommets voisins, on devrait avoir $|\frac{\beta}{\alpha}| = |\varpi_D|$, ce qui empêcherait σ^2 d'être représenté par une matrice scalaire à coefficients dans k.

2.2 CERTAINS SOUS-GROUPES DE PGL_2.

On considère le sous-groupe $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$ d'indice 2 de $\mathrm{PGL}_2(D)$, formé des images des matrices dont la valuation du déterminant de Dieudonné est paire, et le sous-groupe $\mathrm{PSL}_2(D)$ image dans le groupe projectif du groupe $\mathrm{SL}_2(D)$ des matrices de déterminant de Dieudonné égal à 1, qui est aussi le quotient de $\mathrm{SL}_2(D)$ par son centre.

Ces groupes ont deux orbites sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(D)$, qui est de homogène type q^d. Cet arbre peut être muni d'une structure d'arbre semi-homogène, la numérotation étant associée à la parité de la distance à un sommet donné. Ces deux groupes sont distingués dans $\mathrm{PGL}_2(D)$, respectent la numérotation et sont transitifs sur les sommets de numéro donné.

Le groupe PGL_2 opère sur l'arbre, et conjugue entre eux les fixateurs des sommets.

Le fixateur dans $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$ d'un sommet de l'arbre est conjugué (par un élément de $\mathrm{PGL}_2(D)$) à $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O}_D)$, et son intersection avec $\mathrm{PSL}_2(D)$ est conjuguée à $\mathrm{PSL}_2(\mathfrak{O}_D)$.

Pour appliquer les résultats précédents, il faudra trouver dans ces groupes des sous-groupes simplement transitifs sur la sphère unité. On les prendra comme quotients de sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_L)$.

Le groupe $\mathrm{GL}_2(L)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(D)$. Ces deux groupes ont des centres distincts, celui de $\mathrm{GL}_2(L)$ est constitué des matrices scalaires dans L^*, il n'est pas contenu dans celui de $\mathrm{GL}_2(D)$ constitué des matrices scalaires dans k^* : ainsi $\mathrm{PGL}_2(L)$ n'est pas un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(D)$. Par contre $\mathrm{PSL}_2(L)$ se plonge dans $\mathrm{PSL}_2(D)$, les groupes $\mathrm{SL}_2(D)$ et $\mathrm{SL}_2(L)$ ayant des centres identiques.

Les arbres $\mathcal{A}_D$ de $\mathrm{PGL}_2(D)$ et $\mathcal{A}_L$ de $\mathrm{PGL}_2(L)$ sont tous deux homogènes de type q^d, il n'est pas naturel de les identifier, mais plutôt de considérer $\mathcal{A}_L$ comme un sous-graphe de $\mathcal{A}_D$.

On identifie les classes des réseaux $\mathfrak{O}_L \times \mathfrak{O}_L$ et $\mathfrak{O}_D \times \mathfrak{O}_D$, ceci définit une origine commune O aux deux arbres, les sommets de l'arbres $\mathcal{A}_D$ constituant l'orbite de O sous $\mathrm{GL}_2(D)$, et ceux de $\mathcal{A}_L$ l'orbite de O sous $\mathrm{GL}_2(L)$.

La sphère unité $S_L(O,1)$ de $\mathcal{A}_L$ s'obtient comme une partie de la sphère $S_D(O,d)$ de rayon d dans $\mathcal{A}_D$.

LEMME 8: *Soit H un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_L)$.*

(1) *Le groupe H est transitif sur la sphère $S_L(O,1)$ si et seulement si H est transitif sur la sphère $S_D(O,1)$.*

(2) *On suppose de plus que $H \cap L^*I \subset k^*I$.*

Le groupe $\overline{H}_L$, image de H dans $\mathrm{PGL}_2(L)$, est simplement transitif sur la sphère $S_L(O,1)$ si et seulement si le groupe $\overline{H}_D$ image de H dans $\mathrm{PGL}_2(D)$ est simple-

ment transitif sur la sphère $S_D(O,1)$.

Démonstration: On désigne par $\mathfrak{O}_D^*$, $\mathfrak{O}_L^*$ les groupes des unités des anneaux $\mathfrak{O}_D$ et $\mathfrak{O}_L$, et on considère les sous-groupes d'Iwahori I_D de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_D)$ et I_L de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_L)$ égaux à

$$I_D = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_D^* & \mathfrak{O}_D \\ \mathfrak{P}_D & \mathfrak{O}_D^* \end{pmatrix} \; I_L = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_L^* & \mathfrak{O}_L \\ \mathfrak{P}_L & \mathfrak{O}_L^* \end{pmatrix}.$$

Le groupe d'Iwahori I_D (resp. I_L) est le fixateur dans $\mathrm{GL}_2(D)$ (resp. $\mathrm{GL}_2(L)$) d'une arête passant par O dans l'arbre $\mathcal{A}_D$ (resp. $\mathcal{A}_L$.)

On remarque que $I_D \cap \mathrm{GL}_2(L) = I_L$.

Pour montrer (1), il suffira de remarquer que le premier point est équivalent à ce que l'indice $[H\colon H \cap I_L] = q^d + 1$, et que le deuxième point est équivalent à ce que l'indice $[H\colon H \cap I_D] = q^d + 1$.

Comme H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_L)$, on concluera en remarquant que $H \cap I_D = H \cap I_D \cap \mathrm{GL}_2(L) = H \cap I_L$.

Pour démontrer (2), il faudra vérifier que le fixateur d'un sommet voisin de O est dans le centre du groupe c'est à dire vérifier que les conditions $H \cap I_L \subset L^* I$ et $H \cap I_D \subset k^* I$ sont équivalentes, ce qui sera ici visiblement le cas compte-tenu de la condition de l'énoncé. ∎

Remarque: Le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{O}_L)$ vérifie les conditions de (1), ceci permet de vérifier que les sommets de $\Sigma_L(O,1)$ sont "bien répartis" dans l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(D)$, c'est à dire que deux sommets distincts sont à distance $2d$.

PROPOSITION 9: *On se donne un sommet $x \in \mathcal{A}_D$.*

(1) *On suppose q impair.*
   (a) *Si d est impair,* $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$ *possède un sous-groupe cyclique d'ordre $q^d + 1$ simplement transitif sur $S(x,1)$.*
   (b) *Si $q \equiv 3 \bmod 4$ et si d est impair,* $\mathrm{PSL}_2(D)$, *et à fortiori* $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$, *possède un sous-groupe, diédral d'ordre $q^d + 1$, simplement transitif sur $S(x,1)$.*

(2) *On suppose q pair, alors* $\mathrm{PGL}_2(D)$ *possède un sous-groupe cyclique d'ordre $q^d + 1$ simplement transitif sur $S(x,1)$.*

Démonstration: Les (1)(a) et (2) sont conséquences de la proposition 6.

Pour obtenir (1) (b) on utilise le lemme ci-dessus, le groupe H que l'on a construit, rencontre le centre $L^* I$ suivant des racines 2-ème de l'unité.

Pour montrer que $H \cap L^* I \subset k^* I$, il suffira de vérifier que

$$\mu_{2^\infty} \cap L^* = \mu_{2^\infty} \cap k^*.$$

Les racines de l'unité dans k (resp. L) proviennent des corps résiduels $\mathbb{F}_q$ (resp. $\mathbb{F}_{q^d}$), leurs ordres sont les diviseurs de $q-1$ (resp. q^d-1). L'ordre des racines 2–ème de l'unité dans k (resp. L) sont les puissances de 2 dont l'exposant appartient à $[0, \mathrm{val}_2(q-1)]$ (resp. $[0, \mathrm{val}_2(q^d-1)]$).

L'égalité $\mu_{2^\infty} \cap L^* = \mu_{2^\infty} \cap k^*$ est donc équivalente à $\mathrm{val}_2(q^d-1) = \mathrm{val}_2(q-1)$. Ce sera le cas si q est pair, ou si q est impair et d est impair. ∎

Corollaire 10:

(1) *On suppose q pair.*
- (a) *Les groupes $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$ et $\mathrm{PSL}_2(D)$ possèdent des sous-groupes simplement transitifs sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{A}_D$, qui sont des produits libres de deux groupes cycliques.*
- (b) *Pour chaque numéro de sommet, ces groupes possèdent des réseaux relatifs de type cyclique, qui peuvent être choisis comme sous-groupes du groupe construit en* (a).

(2) *On suppose q impair et d impair.*
- (a) *Le groupe $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$ possède un sous-groupe simplement transitif sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{A}_D$, qui est un produit libres de deux groupes cycliques.*
- (b) *Pour chaque numéro de sommet, ces groupes possèdent des réseaux relatifs de type cyclique, qui peuvent être choisis comme sous-groupes du groupe construit en* (a).

(3) *On suppose $q \equiv 3 \bmod 4$ et d impair.*
- (a) *Le groupe $\mathrm{PSL}_2(D)$ possède un sous-groupe simplement transitifs sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{A}_D$, qui est un produit libre de deux groupes diédraux, et le groupe $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$ possède un sous-groupe simplement transitif sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{A}_D$, qui est un produit libre de deux groupes cycliques ou diédraux.*
- (b) *Pour chaque numéro de sommet, ces groupes possèdent des réseaux relatifs. Ces réseaux peuvent être choisis comme sous-groupes du groupe construit en* (a), *ils sont de type diédral pour $\mathrm{PSL}_2(D)$, et peuvent être cycliques, mixtes ou diédraux pour $\mathrm{PGL}_2^\circ(D)$.*

Remarque: Pour $d = 1$, Lubotzky [L-3] a construit un groupe produit amalgamé de deux groupes d'ordre $2(q+1)$ opèrant chacun transitivement sur une sphère unité. On pourra vérifier que ce groupe contient pour q pair (resp. $q \equiv 3 \bmod 4$) le groupe construit ci-dessus en (1)(a) (resp. (3)(a)), comme sous-groupe d'indice fini.

3. Groupes orthogonaux et unitaires

3.1. On va appliquer les constructions, données dans les deux premières sections, aux groupes classiques de type orthogonal et unitaire de rang relatif un, qui sont donc associés aux formes quadratiques ou hermitiennes d'indice de Witt égal à un.

Deux groupes orthogonaux de rang un sont isogènes à des groupes linéaires. Ce sont les groupes spéciaux orthogonaux en dimension 3 et 4, ainsi réalisés : on munit les espaces k^3 et $k \oplus L \oplus k$, de dimension 3 et 4, où L est une extension quadratique du corps local k, des formes quadratiques,

$$q_3(x_{-1}, x_0, x_1) = x_{-1}x_1 + x_0^2, \quad q_4(x_{-1}, \xi, x_1) = x_{-1}x_1 + N_{L/k}(\xi)$$

où on désigne $x_{\pm 1}$ une coordonnée dans k et ξ une coordonnée dans L.

On notera par SO(3) (resp. SO(4)) le groupe spécial orthogonal de la forme q_3 (resp. q_4).

LEMME 11:

(1) *Le groupe* SO(3) *est isomorphe à* $\mathrm{PGL}_2(k)$.

(2)

  (a) *Le quotient* $\mathrm{SO}(4)/\pm I$ *est isomorphe au sous-groupe de* $\mathrm{PGL}_2(L)$ *constitué des images dans* PGL_2 *des éléments de* GL_2 *dont la norme du déterminant est un carré de* k, *i.e. des classes d'éléments* g *de* $\mathrm{GL}_2(L)$ *avec* $\det g \in N_{L/k}^{-1}(k^2)$.

  (b) *Dans tous les cas l'image de* SO(4) *contient* $\mathrm{PSL}_2(L)$, *et si l'extension* L *de* k *est non ramifiée, c'est le groupe* $\mathrm{PGL}_2^\circ(L)$ *des classes d'éléments de* $\mathrm{GL}_2(L)$ *dont la valuation du déterminant est paire, et elle contient en particulier* $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O}_L)$ *comme sous-groupe compact maximal.*

Démonstration: Les résultats (1) et (2)(a) se trouvent en substance dans [VdW], mais seulement si la caractéristique est impaire. Ils sont faciles à établir à partir de la décomposition de Bruhat des groupes, car les radicaux unipotents des sous-groupes de Borel sont isomorphes à k (resp. L). Ainsi on vérifie que la variété des drapeaux isotropes a une structure de droite projective sur k (resp. L), d'où un homomorphisme des groupes orthogonaux dans des groupes d'homographies sur k ou (resp. L), et on conclut aisèment la démonstration.

Pour (2)(b) si $L|k$ est non ramifiée, on a $N_{L/k}(\mathfrak{O}_L^*) = \mathfrak{O}_k^*$, car l'application norme dans le cas d'un corps fini est surjective. ∎

3.2. Les groupes étudiés dans ce numéro seront des groupes orthogonaux et unitaires de rang relatif un.

Pour donner une présentation commune, on désignera par L, dans le cas orthogonal le corps k, et dans le cas hermitien l'extension quadratique séparable de k, permettant de définir la forme hermitienne, et q_L le cardinal du corps résiduel de L.

On considèrera des espaces vectoriels sur L de la forme $E = L \oplus V \oplus L$: on écrira un vecteur x de E sous la forme $x = (x_{-1}, \xi, x_1)$, avec $x_{\pm 1} \in L$, et $\xi \in V$, ou encore $x = x_{-1}e_{-1} + \xi + x_1 e_1$.

On commencera par considérer une forme quadratique Q de rang un sur un espace de dimension 5 sur le corps k, que l'on peut décrire à partir d'un espace vectoriel V de dimension 3 muni d'une forme quadratique anisotrope q, par exemple un sous-espace de dimension 3 du corps des quaternions sur k, la norme quaternionique étant la forme quadratique, et on considèrera sur E la forme quadratique

$$Q(x_1, \xi, x_1) = x_{-1}x_1 + q(\xi).$$

Le groupe spécial orthogonal d'une telle forme sera noté $\mathrm{SO}(5, Q)$, il est de rang relatif un.

On étudiera ensuite des groupes spéciaux unitaires $\mathrm{SU}(n)$ de rang un, associés à des formes Q hermitiennes sur des espaces de dimension n, il y en a pour $n = 3$ ou $n = 4$, qui sont ainsi construits.

Pour $n = 3$, on part de $V = Le_0$ muni de la forme hermitienne $q(x_0 e_0) = x_0 x_0^\sigma$, et pour $n = 4$, on choisit un espace hermitien (V, q) anisotrope de dimension deux sur L, par exemple $V = H$ le corps des quaternions sur k la forme $q(\xi) = N(\xi)$ définie par la norme quaternionique N.

On définit alors sur E la forme Q par

$$Q(x) = x_{-1}x_1^\sigma + q(\xi) + x_1 x_{-1}^\sigma.$$

On désignera par G l'un des groupes définis ci-dessus; l'étude des sous-groupes compacts maximaux de G utilise l'arbre, dont la réalisation géométrique est définie dans [B-T 2] comme espace des normes autoduales, et que l'on va rappeler ici.

Une norme sur l'espace vectoriel E défini sur le corps valué L est une fonction ν de E dans $\mathbb{R}^+$, pour laquelle $d(x,y) = \nu(x-y)$ est une distance ultramétrique, et qui vérifie $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$, pour $\lambda \in L$. A la forme quadratique Q est associée une forme bilinéaire ou sesquiléaire $\langle , \rangle$, on définit une norme ν^* associée à une norme ν, par

$$\nu^*(x) = \sup_{y \in E^*} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\nu(y)}.$$

Une norme ν sera dite autoduale si $\nu = \nu^*$.

La réalisation géométrique de l'immeuble de ces groupes G est un arbre, réunion de droites réelles, constitué des normes autoduales, ou plutôt de leur logarithme de base q_L^{-1}, les normes autoduales correspondant alors aux normes maximinorantes de [B-T 2]

Les bouts de ces arbres s'identifient à l'immeuble sphérique du groupe G, qui est la variété des droites isotropes de V. Se donner deux bouts équivaut à se donner une décomposition de l'espace E à l'aide d'un espace V comme ci-dessus, c'est aussi se donner un tore déployé dans G. La réalisation géométrique de la géodésique définie par ces données, est la famille de normes ν_α avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, définies par

$$\nu_\alpha(x) = \sup\left(\frac{|x_{-1}|}{q_L^\alpha}, \sqrt{|q(\xi)|}, |x_1| q_L^\alpha\right).$$

Les fixateurs K_α dans G des normes ν_α sont des sous-groupes parahoriques, qui sont soit des sous-groupes compacts maximaux, soit des sous-groupes d'Iwahori.

On reconnait les compacts maximaux parmi les parahoriques: ce sont les fixateurs des sommets de l'arbre combinatoire. Un point x_0 est situé sur une géodésique de l'arbre géométrique est un sommet de l'arbre combinatoire, si et seulement s'il existe dans le groupe G un élément qui le fixe et qui permute les bouts de la géodésique.

Pour la géodésique associée aux droites Le_1 et Le_{-1}, qui est constituée des normes ν_α, un tel élément doit échanger ces droites : on vérifie aisément qu'il en existe fixant ν_α si et seulement si $\alpha \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Les autres valeurs de α donnent des groupes d'Iwahori qui sont conjugués. Et les compacts maximaux se répartissent en deux classes de conjugaison celle de K_0 et celle de $K_{\frac{1}{2}}$.

3.3 $\mathrm{SO}(5, Q)$. On part du corps de quaternions H sur k que l'on peut construire à partir d'une extension quadratique séparable non ramifiée $L = k(\epsilon)$ de k, où ϵ est une unité ($|\epsilon| = 1$), et partir d'une uniformisante ϖ_H telle que $\varpi_H^2 = \varpi$ soit une uniformisante de k.

Le corps H s'écrit comme espace vectoriel $H = L \oplus \varpi_H L$, la norme quaternionique s'explicitant en

$$N_H(\lambda + \varpi_H \mu) = \lambda\lambda^\sigma - \varpi\mu\mu^\sigma.$$

Sur un espace V de dimension 3, on peut considérer deux formes quadratiques anisotropes, la première q_1 est la restriction de la norme N_H au sous-espace $V = k \oplus \varpi_H L$,

$$q_1(u, v, w) = u^2 - \varpi N(v + \epsilon w),$$

la deuxième est la restriction de la norme N_H au sous-espace $V = L \oplus \varpi_H k$,

$$q_2(u, v, w) = N(u + \epsilon v) - \varpi w^2.$$

On définit les formes quadratiques de rang un Q_i ($i = 1, 2$) sur $E = k \oplus V \oplus k$, par

$$Q_i(x_{-1}, \xi, x_1) = x_{-1}x_1 + q_i(\xi).$$

On remarque que $-\varpi Q_2(x_1, (u, v, w), x_1) = Q_1(-\varpi x_{-1}, (\varpi w, u, v), x_1)$.

Ainsi les deux formes quadratiques de type Q_1 et Q_2 auront donc même groupe spécial orthogonal.

On part des formes Q_1 et Q_2 écrites à l'aide de la décomposition $E = ke_{-1} \oplus V \oplus ke_{-1}$ et des formes q_1 et q_2 sur V, et on désigne par ν_α et ν'_α les normes correspondant à Q_1 et à Q_2.

On remarque que $q^{-\frac{1}{2}}\nu'_{\frac{1}{2}}(x_{-1}, (u, v, w), x_1)$ est égal à

$$\sup(|\varpi x_{-1}|, \sqrt{|-\varpi q_2(u, v, w)|}, |x_1|) = \nu_0(\varpi x_{-1}, (-\varpi w, u, v), x_1),$$

dont le second membre montre que c'est une norme autoduale associée à la forme ϖQ_1.

Ceci montre que les compacts maximaux de $\mathrm{SO}(5,Q)$ sont conjugués aux groupes $K^i = \{g \in \mathrm{SL}(5,\mathfrak{O}) \mid \forall x \in E \quad Q_i(gx) = Q_i(x)\}$ pour $i = 1,2$, qui sont des éléments entiers du groupe $\mathrm{SO}(5,Q)$ réalisé soit à partir de Q_1 soit de Q_2.

Les formes Q_i sont entières, et leurs réduites mod ϖ sont

$$\overline{Q_1}(\bar{x}) = \bar{x}_1\bar{x}_{-1} + \bar{u}^2 \quad \text{et} \quad \overline{Q_2}(\bar{x}) = \bar{x}_1\bar{x}_{-1} + N(\overline{u+\epsilon v}).$$

On voit ainsi que le groupe K^1 (resp. K^2) réduit mod ϖ est un groupe $\mathrm{SO}(3,q)$ (resp. une forme de rang un de $\mathrm{SO}(4,q)$ décrit plus haut) l'action de ce groupe sur la sphère unité centrée au sommet fixé par K^1 (resp. K^2) est celle de $\mathrm{PGL}_2(q)$ sur $\mathbb{P}^1(q)$ (resp. d'un sous-groupe de $\mathrm{PGL}_2(q^2)$ contenant $\mathrm{PSL}_2(q^2)$ sur $\mathbb{P}^1(q^2)$).

Lemme 12:

(1) *Le fixateur d'un sommet d'ordre q contient un sous-groupe qui opère simplement transitivement sur la sphère unité centrée en ce sommet; on peut toujours le choisir cyclique d'ordre $q+1$, et si de plus $q \equiv 3 \bmod 4$ on peut aussi le choisir diédral.*

(2) *Si q est pair, le fixateur d'un sommet d'ordre q^2 contient un sous-groupe cyclique d'ordre q^2+1 qui opère simplement transitivement sur la sphère unité centrée en ce sommet.*

Démonstration: Par conjugaison, on peut se ramener au groupe K^1 qui contient un groupe $\mathrm{SO}(3,\mathfrak{O})$ pour le (1), et à K^2 qui contient un $\mathrm{SO}(4,\mathfrak{O})$ de rang un pour le (2), et le groupe K^1 (resp. K^2) a même réduction mod ϖ que le groupe $\mathrm{SO}(3,\mathfrak{O})$ (resp. $\mathrm{SO}(4,\mathfrak{O})$).

Pour un sommet de type q, on utilise l'isomorphisme de $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O})$ et l'isomorphisme de $\mathrm{SO}(3)$ vu plus haut, et on applique les résultats démontrés dans $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O})$.

Mais pour le second cas, le groupe $\mathrm{SO}(4)$ n'est pas isomorphe à un sous-groupe de PGL_2, mais seulement un quotient de $\mathrm{SO}(4)$ par son centre l'est. On ne conclut que dans le cas q pair. Dans ce cas, un sous-groupe cyclique d'ordre q^2+1 de $\mathrm{PSL}_2(\mathfrak{O})$ se relève dans $\mathrm{SO}(4,\mathfrak{O})$ en un groupe d'ordre $c(q^2+1)$, avec $c = |\mu_2(k)| = 1$ ou 2. Si $c=2$ le centre de $\mathrm{SO}(4,\mathfrak{O})$ est $\pm I$, d'ordre premier avec q^2+1, le groupe obtenu est cyclique d'ordre $2(q^2+1)$ et possède un sous-groupe d'ordre q^2+1 qui a même image que lui dans $\mathrm{SO}(4,\mathfrak{O})/\pm I$. ∎

On a démontré

THÉORÈME 13: *Soit G le groupe* $\mathrm{SO}(5,Q)$ *d'une forme quadratique de rang un sur le corps local k. Son arbre est semi-homogène de type* (q,q^2).

(1) *On suppose q impair.*

Le groupe G possède un réseau relatif aux sommets de type q^2, de type cyclique si $q \not\equiv 3 \bmod 4$, *et mixte si* $q \equiv 3 \bmod 4$.

(2) *On suppose q pair.*

(a) *Le groupe G possède un sous-groupe simplement transitif sur les arêtes de l'arbre de G; c'est un produit libre de deux groupes cycliques, l'un d'ordre $q+1$, l'autre d'ordre q^2+1.*

(b) *Pour chaque numéro de sommets, G possède un réseau relatif de type cyclique, qui peut être choisi comme sous-groupe distingué du groupe construit au* (a).

Exemple: Soit $k = \mathbb{Q}_2$, on considère $L = k(\gamma)$, où γ est une racine de l'équation $x^2+x=1$, la forme $Q(x_{-1},(u,v,w),x_1) = x_{-1}x_1+u^2+uv-v^2-2w^2$ quadratique sur k^5, et le groupe $G = \mathrm{SO}(5,Q)$ associé à cette forme, la valence des sommets de son arbre est alternativement 3 et 5, il est dessiné dans [T].

D'après le théorème précédent, le groupe G possède un sous-groupe Γ qui opère simplement transitivement sur les arêtes, et qui est un produit libre de deux groupes cycliques, dont, en suivant la démonstation, on peut donner les générateurs qui sont

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

α étant d'ordre 5, et β d'ordre 3.

3.4 SU(3) ET SU(4). Les groupes SU(3) ou SU(4) définis au numéro 3.2 sont relatifs à une extension quadratique galoisienne L du corps k, que l'on écrira dans le cas non ramifié $L = k(\varepsilon)$ avec ε une unité, et dans le cas ramifié $L = k(\varpi_L)$, et dans ce cas on choisira $\varpi = \varpi_L^2$ comme uniformisante de k.

L'algèbre de quaternions H sur k munie de la norme quaternionique fournira un modèle d'espace hermitien sur L anisotrope de dimension deux, que l'on décrit ainsi : si L est non ramifiée sur k, on considère $H = L \oplus L\varpi_H$, avec $\varpi_H^2 = \varpi$ l'uniformisante commune de L et k, et si L est ramifiée sur k, ce qui suppose la caractéristique impaire, l'algèbre de quaternions peut s'écrire $H = L \oplus L\varepsilon$, avec $\varepsilon^2 = \eta$ une unité de k. Ainsi l'espace $E = L \oplus H \oplus L$ est alors muni d'une forme hermitienne de rang un comme au numéro 3.2; on notera α l'élément 1 et β l'élément ϖ_H ou ε, selon le cas, de H plongé dans E, ils forment une base de H comme sous-espace de E.

On désignera par G, soit un groupe SU(3), soit le quotient $\mathrm{SU}(4)/\pm I$ d'un groupe de rang un, dont on va étudier les compacts maximaux. Ceux-ci sont décrits aisément en termes de normes.

3.5 q IMPAIR. On supposera dans ce numéro que q est impair.

Le fixateur K_0 de la norme ν_0 est égal à $K_0 = \mathrm{SU}(3) \cap \mathrm{GL}_3(\mathfrak{O}_L)$, ou à l'image de $\mathrm{SU}(4) \cap \mathrm{GL}_4(\mathfrak{O}_L)$, quand on identifie E à L^n au moyen des bases décrites, c'est le groupe des points entiers de G.

Le fixateur $K_{\frac{1}{2}}$ de $\nu_{\frac{1}{2}}$ est engendré par le groupe d'Iwahori $K_0 \cap K_{\frac{1}{2}}$ et l'élément

$$w_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi_L^{-1} \\ 0 & \rho & 0 \\ \varpi_L^{\sigma} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\rho = -\varpi_L^{1-\sigma}$ si $n = 3$ et ρ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \varpi_L^{1-\sigma}$

Parmi les groupes précédents (q impair), on ne peut appliquer les constructions de l'article que dans deux cas : pour les groupes SU(3) ou $\mathrm{SU}(4)/\pm I$ associés à une extension ramifiée et les compacts K_0 correspondant.

Dans le premier cas on vérifie que l'action réduite mod ϖ_L sur la sphère unité centrée en ν_0 est celle de $\mathrm{SO}(3,q)$ sur la variété des droites isotropes pour la forme étudiée au numéro 3.1, car les formes $2x_1x_{-1} + x_0^2$ et $x_1x_{-1} + x_0^2$ sont équivalentes.

Ce groupe et son action sont isomorphes à celle de $\mathrm{PGL}_2(q)$ agissant sur $\mathbb{P}^1(q)$. Cette action se relève dans $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O}_k)$, puis dans $\mathrm{SO}(3, \mathfrak{O}_k)$ qui est un sous-groupe de K_0 et qui a même réduction dans $\mathrm{SO}(3,q)$.

Dans le second cas, on vérifie que K_0 le fixateur dans G du sommet ν_0 est $G \cap \left(\mathrm{GL}_4(\mathfrak{O}_L)/\pm I\right)$, il contient le groupe $\mathrm{SO}(4)(\mathfrak{O})/\pm I$, associé à la forme $2x_{-1}x_1 + N_{K/k}(\xi)$, qui est équivalente à $x_{-1}x_1 + N_{K/k}(\xi)$, avec $K = k(\varepsilon)$.

L'action réduite de K_0 modulo ϖ sur la sphère unité centrée en ν_0, qui est celle de $\mathrm{SO}(4,q)/\pm I$ associée à la forme quadratique sur $\mathbb{F}_q$ provenant de la forme précédente, est isomorphe à celle du groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_{q^2})$ agissant sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{q^2})$. D'après la proposition 6, comme l'extension K/k est non ramifiée, l'image de $\mathrm{SO}(4)(\mathfrak{O})/\pm I$ est $\mathrm{PGL}_2(\mathfrak{O}_K)$. On obtient

THÉORÈME 14: *On suppose q impair.*

(1) *Soit $G = \mathrm{SU}(3)$ dont l'extension associée est ramifiée. L'arbre $\mathcal{A}_G$ est de type (q,q), et G possède un réseau relatif au numéros de $\nu_{\frac{1}{2}}$. Dans tous les cas ce réseau peut être choisi de type cyclique, et si $q \equiv 3 \bmod 4$, il peut être cyclique, diédral, ou mixte.*

(2) *Soit G est un groupe $\mathrm{SU}(4)/\pm I$ de rang un, associé à une extension ramifiée. L'arbre $\mathcal{A}_G$ est de type (q^2,q), et G possède un réseau relatif au numéro des sommets d'ordre $q+1$, de type cyclique.*

Remarque: Pour d'autres groupes et d'autres sommets l'action du groupe K_* réduite à la sphère unité est celle d'un groupe projectif sur une droite projective, c'est le cas des groupes $K_{\frac{1}{2}}$ pour les groupes $\mathrm{SU}(3)$, que l'extension soit ou non ramifiée, et du groupe $K_{\frac{1}{2}}$ dans le groupe $\mathrm{SU}(4)/\pm I$ associé à une extension non ramifiée. Ces groupes K_* contiennent des $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{O}_F)$, dont les centres ne sont ni triviaux, ni contenus dans ceux de G, ainsi les groupes d'ordre $q+1$, ou q^2+1 obtenus n'admettent pas de relèvement biunivoque dans les groupes K_*.

3.6 q PAIR. On supposera dans dans ce numéro que q est pair.

Le bon point de vue pour étudier les compacts maximaux si q est pair, est celui des données radicielles valuées, car un certain nombre de difficultés techniques surgissent, telles que la valuation des éléments de trace 1 qui doit être discutée. Ayant posé $\delta = \sup\{\omega(\lambda) | \lambda + \lambda^\sigma = 1\}$ et $\Gamma' = \{\omega(d) | d + d^\sigma = 0\}$ pour ω la valuation de L, et en utilisant la relation $\omega(L^*) = \Gamma' \cup 2\omega(L^*) + \delta$ [T], on obtient peu ou prou les mêmes résultats que dans le cas q impair.

THÉORÈME 15: *On suppose q pair.*

(1) *Si G est un groupe $\mathrm{SU}(3)$, associé à une extension ramifiée, ce qui suppose la caractéristique de k égale à zéro, l'arbre $\mathcal{A}_G$ est de type (q,q), et G possède un sous-groupe simplement transitif sur ses arêtes, qui est un produit libre de deux groupes cycliques d'ordre $q+1$.*

De plus, pour chaque numéro G possède un réseau relatif de type cyclique, qui peut être choisi comme sous-groupe distingué du sous-groupe précédent.

(2) *Si G est un groupe $\mathrm{SU}(4)$ de rang un associé à une extension ramifiée, l'arbre $\mathcal{A}_G$ est de type (q^2,q), et G possède un sous-groupe simplement*

transitif sur ses arêtes, qui est un produit libre de deux groupes cycliques d'ordre $q+1$ et q^2+1.

De plus, pour chaque numéro, G possède un réseau relatif de type cyclique, et qui peut être choisi comme sous-groupe distingué du sous-groupe précédent.

(3) *Si G est un groupe* $\mathrm{SU}(3)$, *associé à une extension non ramifiée, l'arbre $\mathcal{A}_G$ est de type (q^3, q), et G possède un réseau relatif au numéro des sommets de type q^3 qui est de type cyclique.*

On peut aussi utiliser les tables de Tits et utiliser

LEMME 16: *Sous les hypothèses précédentes et dans le cas où le groupe résiduel du sommet s est un* PGL_2, *le groupe K_s, qui est le fixateur dans G de s, contient un sous-groupe cyclique simplement transitif sur la sphère unité centrée en s.*

Démonstration: Comme s est un sommet, le groupe K_s contient un groupe U_α et un groupe $U_{-\alpha}$, où α est une racine affine, ces groupes sont les groupes des points entiers de deux groupes unipotents opposés d'un groupe algébrique, et qui se projettent sur les groupes des matrices unipotentes supérieures et inférieures de $\mathrm{PGL}_2(q)$ ou $\mathrm{PGL}_2(q^2)$. On sait que SL_2 sur un corps est engendré par de tels groupes, donc les groupes $\mathrm{PGL}_2(q)$ ou $\mathrm{PGL}_2(q^2)$ admettent des relèvements dans le groupe engendré par U_α et $U_{-\alpha}$ qui est un quotient de $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{O})$ ou de $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{O}')$, où $\mathfrak{O}'$ est l'anneau des entiers de l'extension non ramifiée de degré 2 de k. ∎

Remarque: Cette méthode donne encore des résultats analogues, pour q pair, pour les 4 autres types de groupes qui interviennent dans la classification de [T], et qui sont des formes de groupes orthogonaux σ-quaternioniques, (il y en a 3), et d'un groupe $\mathrm{SU}(3)$ quaternionique.

3.7 PGU(4). On considère le cas d'une extension non ramifiée L de k et la forme hermitienne de rang un sur L^4, que l'on a écrit

$$Q(x_{-1},(u,v),x_1) = x_{-1}x_1^\sigma + uu^\sigma - \varpi vv^\sigma + x_1x_{-1}^\sigma,$$

l'arbre du groupe $\mathrm{SU}(4)$ de cette forme est de type (q^3, q^3).

Soit $\mathrm{GU}(4)$ le groupe des similitudes de cette forme, et $\mathrm{PGU}(4)$ son quotient par son centre formé des matrices scalaires.

On remarque que $-\varpi Q(x_{-1},(u,v),x_1) = Q(-\varpi x_1,(-\varpi v,u),x_{-1})$, on définit alors w par $w(e_1) = e_{-1}$, $w(\alpha) = \beta$, $w(\beta) = \varpi\alpha$, $w(e_{-1}) = -\varpi e_1$, c'est une similitude pour la forme hermitienne Q, dont le carré est scalaire.

En comparant $|\varpi|\nu_{\frac{1}{2}}$ et $w\nu_0$, on voit que les compacts maximaux de $\mathrm{SU}(4)/\pm I$ sont conjugués par PGU(4), l'élément w échangeant K_0 et $K_{\frac{1}{2}}$. La situation analogue à celle du groupe $\mathrm{PGL}_2(k)$, d'où

PROPOSITION 17: *Soit G le groupe* PGU(4) *de rang un associé à une extension non ramifiée, son arbre $\mathcal{A}_G$ est homogène de type q^3, et il y opère transitivement Soient r, s deux entiers tels que $2r + s = q^3 + 1$, alors il existe des sous-groupes discrets de G isomorphes à*

$$\Gamma_{r,s} = \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{r} * \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{s},$$

et opérant simplement transitivement sur les sommets de $\mathcal{A}_G$, et il y a un isomorphisme naturel entre l'arbre de $\Gamma_{r,s}$ défini par son graphe de Cayley et $\mathcal{A}_G$.

References

[B] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups,* Journal of Pure and Applied Algebra **89** (1993), 3–47.

[B-K] H. Bass and R. Kulkarni, *Uniform tree latices,* Journal of the American Mathematical Society **3** (1990), 843–902.

[B-H] A. Borel and G. Harder, *Existence of discrete cocompact subgroups of reductive groups over local fields,* Journal für die reine und angewandte Mathematik **298** (1978), 53–64.

[B-T 1 & 2] F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local,* 1re *partie: le groupe linéaire général,* Bulletin de la Société Mathématique de France **112** (1984), 259–301; 2e *partie: groupes unitaires* Bulletin de la Société Mathématique de France **115** (1987), 141–195.

[C-1] F. Choucroun, *Analyse harmonique sur le groupe des automorphismes d'un arbre homogène et applications aux groupes libres,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **296** (1983), 585–588.

[C-2] F. Choucroun, *Groupes opérant simplement transitivement sur un arbre homogène et plongements dans* $\mathrm{PGL}_2(k)$, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **298** (1984), 313–315.

[C-3] F. Choucroun, *Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbre de Bruhat-Tits*, Mémoires de la Societé Mathématique de France, supplément $n^0 58$ au bulletin **122** (1994), fasc. 3.

[F-P] A. Figa-Talamanca and M. A. Picardello, *Restriction of spherical representation of* $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *to a discrete subgroup*, Proceedings of the American Mathematical Society **91** (1983), 405–408.

[I] Y. Ihara, *Dicrete subgroup of* $\mathrm{PGL}_2(k_{\mathfrak{p}})$, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **9** (1966), 272–278.

[J] N. Jacobson, *Basic Algebra II*, Freeman and Company, San Francisco, 1989.

[L-1] A. Lubotzky, *Trees and discrete subgroups of Lie groups over local fields*, Bulletin of the American Mathematical Society **20** (1989), 27–30.

[L-2] A. Lubotzky, *Lattices in rank one Lie groups over local fields*, Geometric and Functional Analysis **1** (1991), 406–431.

[L-3] A. Lubotzky, *Lattices of minimal covolume in* SL_2*: a non-archimedian analogue of Siegel's theorem* $\mu \geq \frac{\pi}{21}$, Journal of the American Mathematical Society **3** (1990), 961–975.

[M-W] B. Mohar and W. Woess, *A survey on spectra of infinite graphs*, The Bulletin of the London Mathematical Society **21** (1989), 209–234.

[S] J. P. Serre, *Arbres, amalgames*, SL_2, Astérisque **46** (1977).

[T] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **33** (1979), 29–69.

[VdW] B. L. van der Waerden, *Gruppen von linearen transformationen*, Chelsea Publ. Co., New York, 1948.